От редактора

Этот номер запоздал на 2 года. Будем надеяться, что следующий номер выйдет быстрее.

Необходимо разъяснить, что такое реляционная логика.

Реляционная логика заменяет функции и предикаты отношениями. В результате различия между функциями и предикатами исчезают. В частности, предикаты могут быть термами.

Это значит, что реляционная логика является расширением классической, а классическая логика во всем ее разнообразии становится частью реляционной.

Но кроме просто реляционной логики существует естественная реляционная логика. Эта логика устраняет все неестественное в классической логике.

Классическая теория множеств элегантна, но неестественна. Точнее, это не теория, а метатеория, т.к. все математические теории являются семантическими конструкциями, а "теория"множеств является семантической конструкцией. Тем не менее мы будем следовать существующим традициям.

Наиболее естественная теория множеств следующая. Все множества получаются из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ с помощью конечного числа операций прямого произведения и множества всех подмножеств. Подмножества этих множеств тоже являются множествами. Других множеств не существует. В частности, натуральные числа и любые кортежи не являются множествами. Все эти объекты суть "пустые множества", следовательно, "пустые множества"не есть множества. Тем не менее, можно пользоваться символом "пустого множества"$\varnothing$. Например, $R_1 \cap R_2 = \varnothing$ есть краткая запись для $\forall R_0\ R_1 \cap R_2 \neq R_0$, где R_1, R_2, R_0 – переменные, и значениями этих переменных являются имена множеств.

Естественная теория множеств очень мощная, не смотря на простоту. В этой теории существует арифметический универсум, он не является множеством, но содержит все множества в качестве своих элементов. Существует алгебраический универсум, который содержит все арифметические подуниверсумы в качестве своих элементов. Если это необходимо, то можно построить универсумы любой мощности.

Естественная теория множеств, включая универсумы, не содержит парадоксов.

Классическая теория множеств может содержать парадоксы. В частности, существуют такие подмножества $\mathbb{N}$, элементы которых не могут быть пронумерованы. Таковы продуктивные и иммунные множества. Следовательно, существуют мощности, промежуточные между конечными и счетными. Но ординалы доказывают, что такие мощности не существуют. Только привлечение аксиомы выбора позволяет разрешить этот парадокс.

Естественная теория множеств позволяет получить результаты, противоречащие классической теории. Примером являются счетные ординалы.

Счетный ординал есть семейство подобных вполне упорядоченных множеств рациональных чисел. Рациональные числа являются элементами множества $\mathbb{N}^3$, т.к. числитель есть целое число, т.е. элемент из $\mathbb{N}^2$, знаменатель есть положительное натуральное число, т.е. элемент из $\mathbb{N}$. Вполне упорядоченное множество рациональных чисел есть элемент из $\mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$. Следовательно, счетный ординал является элементом из $\mathcal{P}^2(\mathbb{N}^3)$. Множество всех счетных ординалов есть элемент из $\mathcal{P}^3(\mathbb{N}^3)$. Но теперь нет никаких оснований считать, что этот элемент несчетный. Более того, в одной из следующих статей будет показано, что указанный элемент является счетным. Но это не означает, что классическая теория множеств противоречива. Это означает только, что классическая теория множеств есть фикция, так как эта теория не соответствует нашим представлениям о множествах.

Еще одна элегантная, но неестественная теория есть нестандартный анализ. Более естественная теория нестандартного анализа основана на модели Кантора. Соответствующая статья открывает данный номер журнала.

Необходимо заметить, что Гильбертово пространство существует в естесственной теории множеств, не смотря на то, что число операций прямого произведения конечно. Просто прямые произведения заменяются бесконечной последовательностью действительных чисел, и каждая последовательность является точкой в Гильбертовом пространстве. Каждое действительное число в этой последовательности есть элемент из $\mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$. Каждый элемент последовательности принадлежит множеству $\mathcal{P}(\mathbb{N}^3) \times \mathbb{N}$. Таким образом, вся последовательность есть элемент из $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}^3) \times \mathbb{N})$, а Гильбертово пространство есть элемент из $\mathcal{P}^2(\mathcal{P}(\mathbb{N}^3) \times \mathbb{N})$.